**Оценка качества нелинейных систем автоматического управления**

То обстоятельство, что вблизи границы устойчивости качество процесса регулирования ухудшается, дает основание полагать, что любой критерий устойчивости может послужить основой для выработки тех или иных оценок качества процесса.

Так, в линейных системах все критерии устойчивости уста­навливали неравенства, дающие условия нахождения всех кор­ней характеристического уравнения слева от мнимой оси. Когда мы конкретизировали эти неравенства и потребовали, чтобы, кроме того, все корни были удалены от мнимой оси не менее чем на величину , мы уже ввели простейшую оценку качества             – степень устойчивости. Однако в практике качество оценивается по иным  прямым показателям, поэтому потребовалось дополни­тельно установить связь степени устойчивости с прямыми показа­телями качества.

С помощью критерия Попова понятие степени устойчивости может быть использовано и для оценки качества нелинейных систем, как это было указано Я.З. Цыпкиным [7,8].

Будем говорить, что нелинейная система автоматического управления обладает затуханием или степенью устойчивости   не меньше заданной, если для отклонения координаты от положения равновесия при любых *t*остается справедливым неравенство:

                                                    ,                           (4.1)

где *М*= const.

Чтобы неравенство  (4.1)  могло  иметь место при любых  *t,*необходимо, чтобы

      .

Если данный предел будет равным нулю, т. е. , это будет означать, что стремится к нулю быстрее, чем *.*

Составим интегральное уравнение относительно функции   

                                             ,                    (4.2)

где  – исчезающая  функция  времени,  приложенная  к  си­стеме в момент *t*= 0. В частности, это может быть реакция линей­ной системы на возмущение начальных условий.

 Умножим обе части (4.2) на , получим

                                      (4.3)

К уравнению (4.3) можно будет применить критерий Попова, но только при условии, если мы накладываем дополнительное ограничение на функцию 

                                               .                               (4.4)

Тем самым мы требуем, чтобы затухание линеаризованной системы было большим, чем заданная нижняя граница затуха­ния . Это обстоятельство понятно. Оно аналогично условию, что для абсолютной устойчивости системы необходимо, чтобы линеаризованная система была устойчивой.

Если условие (4.4) выполняется, то в соответствии с крите­рием Попова система, описываемая уравнением (4.3), обладает абсолютно устойчивым положением равновесия, если

                                        ,                            (4.5)

где 

можно назвать смещенной частотной характеристикой системы.

Если   критерий   абсолютной   устойчивости   преобразованной таким    образом системы выполняется, то , и, следовательно, исходная   система обладает затуханием не меньше заданного .

В частном случае, когда разомкнутая линейная система устойчива, мы можем, как это было показано ранее, положить  и выражение (4.5) свести к более простому виду

                                                       .                                  (4.6)

Наконец, если мы исследуем не затухание отклонения процесса  от вынужденного, а затухание отклонения координаты от положения равновесия, то в соответствии с критерием абсолютной устойчивости положения равновесия для того, чтобы затухание отклонения было не меньше заданного , достаточно, чтобы выполнялось следующее неравенство

                                                   .                              (4.7)

Перейдем к интегральным оценкам.

По аналогии с линейными системами для оценки качества нелинейной системы можно применить интегральную квадратичную оценку

                                                ,                              (4.8)

где  – выходная координата нелинейного элемента.

В общем виде определить или оценить величину интеграла *J*, по крайней мере при современном состоянии математики, не представляется возможным. Но если наложить некоторые ограничения на класс нелинейных функций *Ф(х)*, то, как это было показано В. М. Поповым [5], оценка величины интеграла (4.8) становится возможной.

Дополнительное ограничение, налагаемое на функцию *Ф(х)*, сводится к следующему.

Будем полагать, что рассматриваемый класс функций удовлетворяет условиям

                                                          .                                            (4.9)

Кроме того, считаем, что касательная к кривой *Ф (х)*, проведенная из начала координат, имеет угловой коэффициент , меньший, чем            (см. рисунок 4.1):

   

и что  кривая *Ф(х)* лежит ниже  касательной  во  всех  точках, кроме  точки касания.   Это  означает,  что  характеристика  *Ф(х)*не подходит вплотную к границе запретного сектора  и не стремится к ней асимптотически:

                                                 .                               (4.10)

Имеется известный запас, поэтому должно удовлетворяться также неравенство

                                                .                                (4.11)



Рисунок 4.1 - Положение нелинейной функции *Ф(х)* при некоторых ограничениях

 Используем для оценки *J* величину , которая была введена при выводе критерия Попова:

      .   (4.12)

Исходим из того, что равновесие рассматриваемой системы устойчиво,  поэтому    ;устремив в (4.12) к  бесконечности, а  – к нулю, получаем

                   .   (4.13)

Рассмотрим левую часть неравенства (4.13):

                                          ,                               (4.14)

очевидно, что, так как по нашему условию лежит ниже касательной   (за исключением точки касания), то

                                                          .

Заменяя в выражении (4.14) на меньшую вели­чину , усиливаем неравенство. Сделав эту подстановку, после некоторых преобразований находим:

                             .        (4.15)

Выберем теперь промежуточный параметр ,величина кото­рого заключена между и (см. рисунок 4.1)

                                                  .                                         (4.16)

Заметим, что если мы во втором интеграле неравенства (4.15) заменим величину на меньшую величину ,то неравенство усилится, (числитель уменьшится в меньшей степени, чем зна­менатель).

Поэтому

                          (4.17)

конечно, неравенство усилилось бы еще больше, если бы анало­гичную замену на мы выполнили бы и в первом слагаемом правой части, но такая замена для нас бесполезна, поэтому мы ее делать не будем.

Теперь остается заменить сложное для вычисления оценки выражение функции Попова в знаменателе подынтегрального вы­ражения второго слагаемого.

Функция *Ф(х)*принадлежит, на основе всего сказанного выше, не только к классу *А*(0, *К2),*но и к подклассам *А*(*0*, *К1)*и *А*(*0, К0*), поэтому при выводе выражения мы могли бы везде ставить *1/К1*вместо *1*/*К2*и считать:

                                        .                     (4.18)

Вычтем и прибавим *1/К1*в правой части неравенства (4.18):

            ,

или                                     ,

                                           .                             (4.19)

Заменив  в (4.19) меньшей величиной *(К2 - К1)/К1К2,*усиливаем неравенство:

                    .        (4.20)

Величина оценки существенным образом зависит от пара­метра . При  или  правая часть неравенства обращается в бесконечность, и оценка теряет всякий смысл. Чтобы она имела какое-то практическое значение, параметр надле­жит выбрать так, чтобы правая часть имела наименьшее значение. Определим значение внутри полосы , так, чтобы правая часть (4.20) стала минимальной.

Решая уравнение (4.20), находим:

                                                .                                          (4.21)

Подставив (4.21) в (4.19), окончательно получим:

                          .           (4.22)

Таким образом, мы свели оценку интеграла  к выражению, которое может быть всегда определено путем интегрирования графика функции *Ф(х)*в заданных пределах и вычисления инте­грала:

                                        .                                (4.23)

Так как  – реакция линейной части на возмущение началь­ных условий, этот интеграл вычисляется методами, рассмотрен­ными в линейной теории регулирования.

Величину следует выбирать как можно меньшей. В пределе это может быть угловой коэффициент касательной, проведенной из точки   к видоизмененной частотной характери­стике системы.

Оценка дает удовлетворительные результаты, если доста­точно отличается от *.*Если эти величины оказываются близ­кими друг к другу, пользоваться оценкой уже не имеет смысла.